Chapitre 10 - La géométrie

Définitions et Propriétés
des Angles, Triangles, Droites, Cercles

En géométrie déductive, on n'accepte pas une phrase comme vrai sans preuve d'un fait, une règle, ou propriété géométrique qu'on accepte que vrai.

Exemple: Si les 2 angles d'un triangle sont 40° et 80°, quelle est la mesure de l'autre angle? (C'est 60° PARCE QUE la somme des 3 angles du triangle est 180° (propriété géométrique *qu'on accepte que vrai*).

Exemple: Si les 2 côtes d'un triangle rectangle sont 3 cm et 4 cm, quelle est la mesure de l'autre côté? (C'est 5 cm quand on emploie Pythagore.. *qu'on accepte que vrai).*

Dans une preuve géométrique, on emploie le raisonnement logique et les faits géométriques ensemble, étape après étape, pour prouver un énoncé.

Dans chaque étape qu'on dit un fait, il faut donner la **RAISON** (la propriété) qu'on peut le dire.

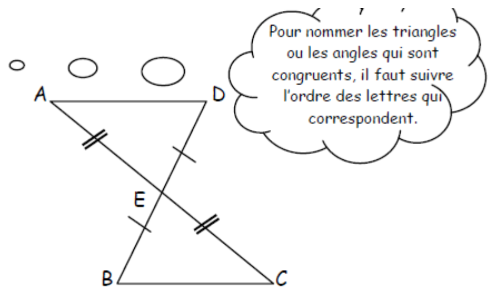
Un ensemble d'énoncés et de justifications constitue une preuve.

Les éléments suivants peuvent servir de justifications dans une preuve :
-les données connues (l'information donnée avant la preuve)
-les définitions
-les propriétés des nombres
-les théorèmes (exemple Pythagore)
-des propriétés

exemple d'une preuve :

Ex : Complétons la preuve
Soit : AE = CE; ED = EB
Prouve que : AD || BC

Énoncés	Justifications
a) AE = CE	Données connues
b) ED = EB	Données connues
c) <AED = <CEB	Théorème des angles opposés
d) Δ AED = Δ CEB	CAC
e) <DAE = <BCE	Triangles congruents
f) AD || BC	Théorème des droites parallèles

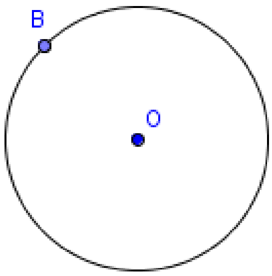


LE CERCLE – Définitions et vocabulaire

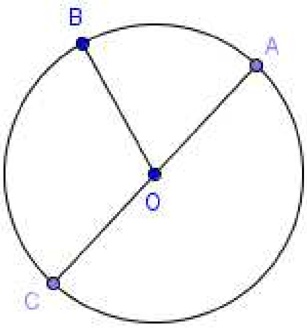
Concepts à définir (ou redéfinir) dans l'unité du cercle :

Un angle	Un angle droit	Un angle aigu
Un angle obtus	Un angle plat	Un angle rentrant
Une droite	Un segment	Une bissectrice
Un cercle	Le centre	Un rayon
Un diamètre	Un arc de cercle	Un petit arc
Un grand arc	Un demi-cercle	Une corde
Un angle au centre	Un angle inscrit	Un angle sous-tendu
Une tangente	Une sécante	Un point de tangence
Une bissectrice	Une médiatrice	Une perpendiculaire

Un CERCLE est l'ensemble de tous les points **équidistants** d'un point fixe, O.



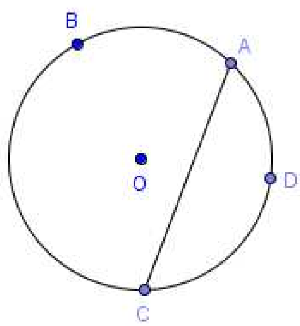
Le point O est le **CENTRE** du cercle et le cercle passe par le point B.



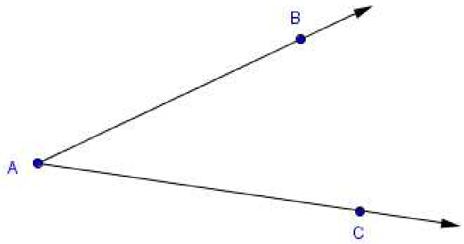
Un **RAYON** est un segment qui rejoint le centre du cercle, O, à un point sur le cercle, B.

Le segment $\overline{OB}$ est un rayon.

Un **DIAMÈTRE** est un segment qui rejoint deux points du cercle et qui passe par le centre du cercle. Le segment $\overline{AC}$ est un diamètre.



Une **CORDE** est un segment rejoignant deux points sur le cercle.
Le segment $\overline{AC}$ est une corde du cercle de centre O.

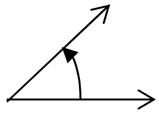


Un angle est formé par deux demi-droites qui se rejoignent en un seul point, **le sommet**.

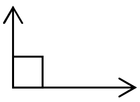
L'angle BAC ($\angle BAC$) est ainsi formé par deux côtés, $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$, et un sommet, A.

Il existe plusieurs types d'angles :

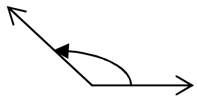
- un angle aigu est un angle qui mesure moins que 90°



- un angle droit est un angle qui mesure 90°. Les côtés qui forment un angle droit sont perpendiculaires ($\perp$)

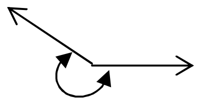


- un angle obtus est un angle qui mesure plus que 90° mais moins que 180° ;



- un angle plat est un angle qui mesure exactement 180° ;

- un angle rentrant est un angle qui mesure plus que 180° mais moins que 360°.

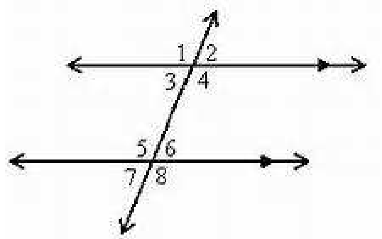


Il y a aussi les angles formés par les droites qui intersectent.

- Les angles opposés par le sommet sont composés des deux mêmes lignes, comme la lettre X. Ils doivent avoir les mêmes lignes et le même sommet. **Les angles opposés par le sommet sont de mêmes mesures**.

Les angles alternes-internes, alternes-externes, et angles correspondants sont formés par *deux lignes parallèles* et une sécante.

- Les angles situés à l'intérieur des parallèles et de chaque côté de la sécante sont nommés alternes-internes. **Les angles alternes-internes sont de mêmes mesures**.
- Les angles situés à l'extérieur des parallèles et de chaque côté de la sécante sont nommés alternes-externes. **Les angles alternes-externes sont de mêmes mesures.**
- Les angles situés du même côté de la sécante, où un des angles est situé à l'intérieur et l'autre est situé à l'extérieur des 2 droites sont nommés correspondants. **Les angles correspondant sont de mêmes mesures.**



$\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$ ($\angle$s opp somm)

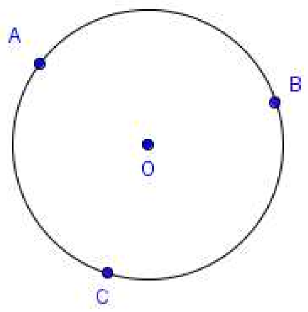
$\angle 5=\angle 8$, $\angle 7=\angle 6$ ($\angle$s opp somm)

$\angle 4 = \angle 5$, $\angle 3 = \angle 6$ ($\angle$s alt-int)

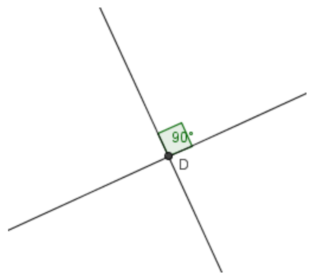
$\angle 2=\angle 7$, $\angle 1=\angle 8$ ($\angle$s alt-ext)

$\angle 1=5$, $\angle 3=\angle 7$ ($\angle$s corr)

$\angle 2=\angle 6$, $\angle 4=\angle 8$ ($\angle$s corr



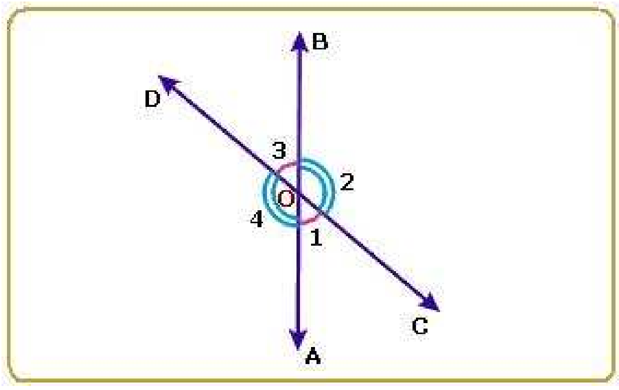
Un <u>arc de cercle</u> (arc AC ou $\overset{\frown}{AC}$) est un morceau de cercle délimité par deux points sur le cercle, A et C. L'arc peut être désigné par deux ou trois lettres. Il existe le <u>grand arc de cercle</u> ($\overset{\frown}{ABC}$) et le <u>petit arc de cercle</u> ($\overset{\frown}{AC}$)



Deux droites qui s'intersectent sont <u>perpendiculaires</u> si elles forment un angle de 90° entre elles. L'angle ainsi formé est un<u> angle droit</u>.

Le Vocabulaire et Définitions :

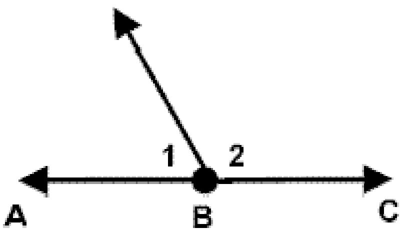
Les Angles, les Triangles, et les Droites aux Cercles



Les angles opposés par le sommet sont congruents.

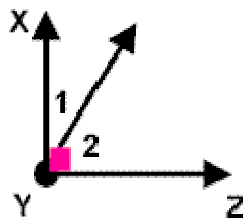
-les droites xy et tz intersectent à O
-les deux angles sont le même sommet (O)

Ex. $m\angle 1 = m\angle 3$ et $m\angle 2 = m\angle 4$



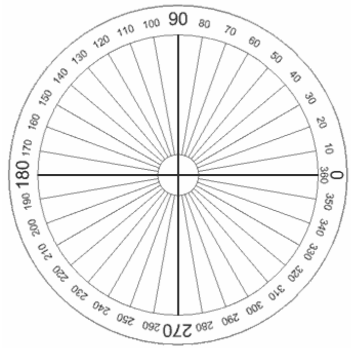
$$m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$$

Les deux angles sont **supplémentaires**.

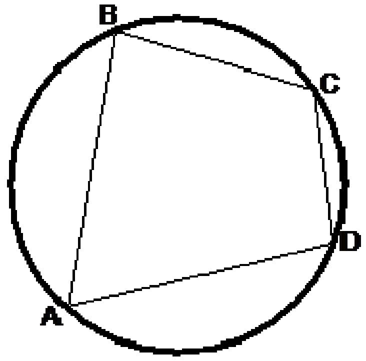


$$m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$$

Les deux angles sont **complémentaires**.



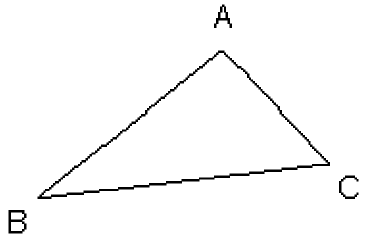
La somme des angles au centre d'un cercle est 360°.



Un quadrilatère (un polygone à 4 côtés) dont tous les sommets sur trouvent sur la même cercle (est inscrit dans la cercle) est un **quadrilatère cyclique**.

La somme des 4 angles d'un quadrilatère est 360°.

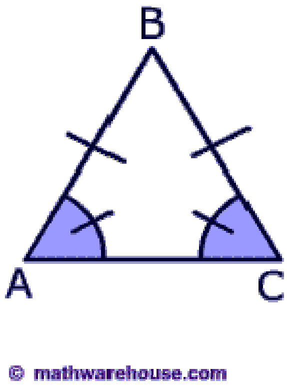
Les angles opposés d'un quadrilatère cyclique sont supplémentaires (leur somme est donc 180°).



La <u>somme des angles d'un triangle</u> est 180°.

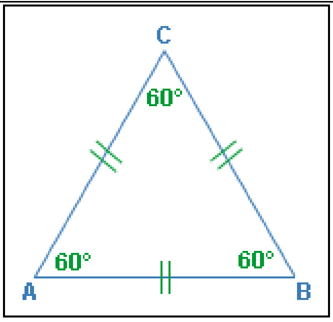
Ex. $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$

Triangle isocèle



AB = AC, donc ABC est **un triangle isocèle**.

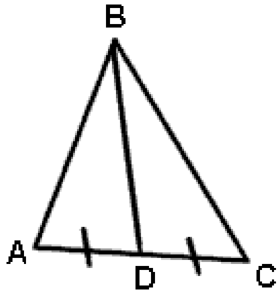
Les deux angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux.



Triangle équilatéral

AB = BC = CA, donc ABC est **un triangle équilatéral.**

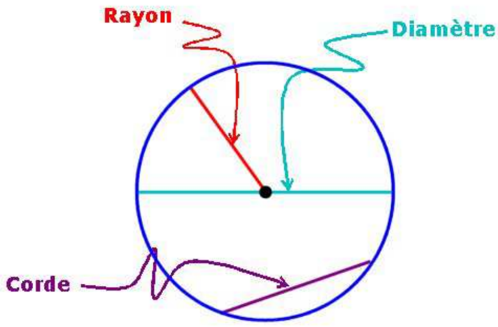
Dans un triangle équilatéral, <u>les trois angles sont égaux</u> et mesurent chacun 60°.



$\overline{BD}$ est <u>une médiane</u> de $\triangle ABC$

$\therefore$ D est <u>le point milieu</u> de $\overline{AC}$

$\therefore$ $\overline{AD} \cong \overline{DC}$



- **Rayon :** droite qui **relie** un **point** du cercle et le **centre** du cercle.

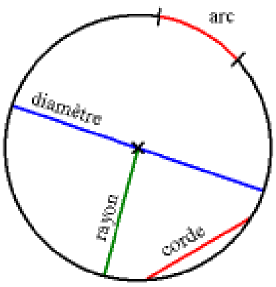
-Tous les rayons du cercle possèdent la même mesure.
-Le rayon équivaut à la moitié du diamètre.
On peut tracer un rayon à partir de n'importe quel point du cercle.
(***Un angle au centre*** *est un angle formé par deux rayons du cercle.)*

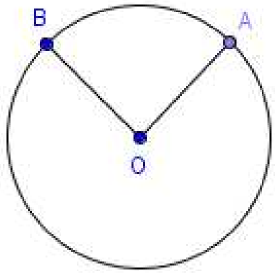
- **Diamètre :** droite qui **relie deux points** du cercle et qui passe par le **centre** du cercle.

-Tous les diamètres du cercle possèdent la même mesure.
-Le diamètre est deux fois plus long que le rayon. (Diamètre = 2 x la mesure du rayon)
-On peut tracer un diamètre à partir de n'importe quel point du cercle.

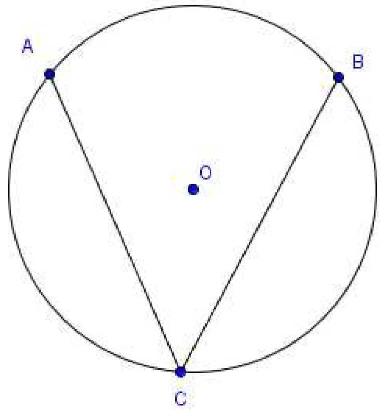
- **Corde :** droite qui **relie deux points** du cercle.

-Toutes les cordes ne possèdent pas la même mesure.
-On peut tracer une corde à partir de n'importe quel point du cercle.
-Le diamètre est une corde qui passe par le centre du cercle.

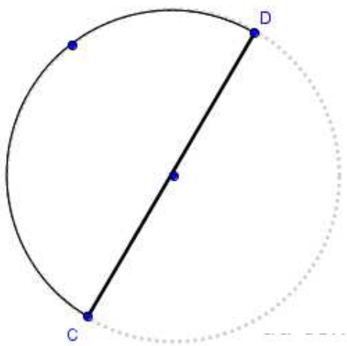




L'**<u>angle au centre</u>** AOB ($\angle$AOB) est un angle dont le sommet est au centre du cercle. Il est <u>sous-tendu</u> par le petit arc AB ($\overset{\frown}{AB}$). On dit également qu'il <u>intercepte</u> $\overset{\frown}{AB}$.

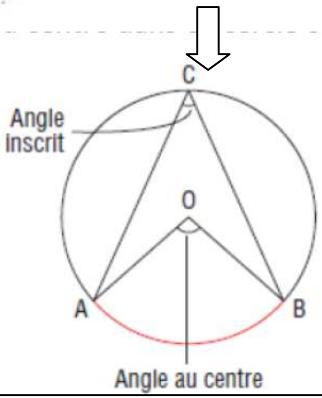


L'<u>angle inscrit</u> ACB ($\angle$ACB) est un angle dont le sommet est sur le cercle. L'angle inscrit ACB est <u>sous-tendu</u> par l'arc AB ou encore <u>intercepte</u> $\overset{\frown}{AB}$; on peut également dire que $\overset{\frown}{AB}$ est <u>intercepté</u> par $\angle$ACB ou qu'<u>il sous-tend</u> $\angle$ACB.



Un **<u>demi-cercle</u>** est un arc délimité par deux points, C et D, qui sont les extrémités d'un diamètre du cercle. Le segment $\overline{CD}$ est un diamètre du cercle et l'arc $\overset{\frown}{CD}$ est un demi-cercle.

Propritété a : L'angle inscrit est la moitié de l'angle au centre



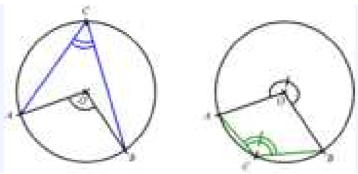
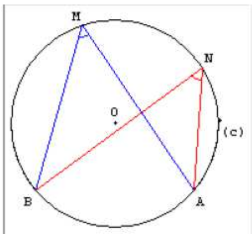


Illustration de deux exemples différents d'angles inscrits angles au centres qui interceptant un même arc.

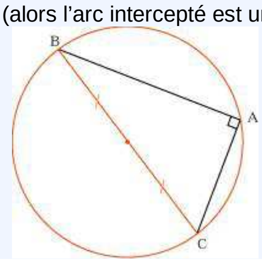
et

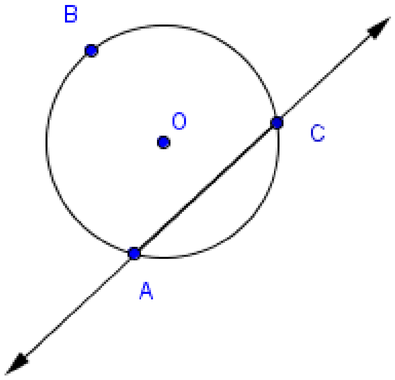
Propriéte b:



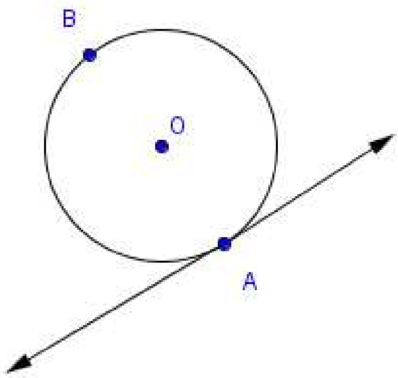
Deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.

Propriété c : Si l'angle au centre est plat (alors l'arc intercepté est un demi-cercle), l'angle inscrit est 90°



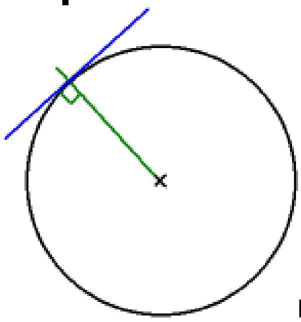


Une **sécante** est une droite qui passe par deux points du cercle, A et C, et qui coupe le cercle en deux parties



Une **tangente** est une droite qui touche le cercle en un seul point, A. On appelle ce point A le point de tangence.

Propriété de la tangente :

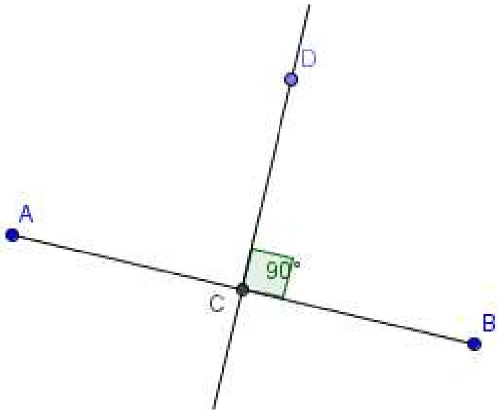


La tangente en un point du cercle est **perpendiculaire au rayon** en ce point.

+++

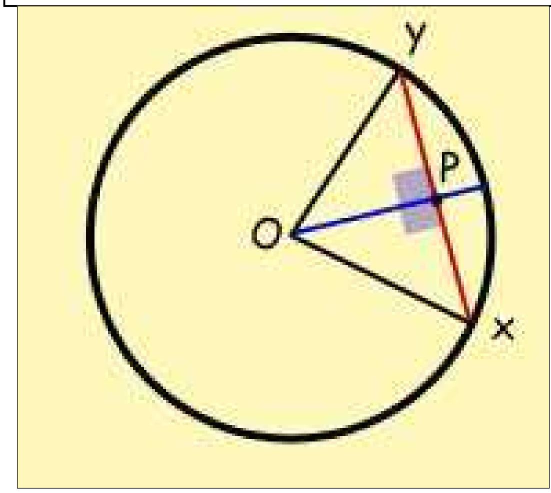
Une **bissectrice** est une droite (une demi-droite ou un segment) qui coupe un angle ou un segment en deux parties égales.

Une **médiatrice** est une bissectrice perpendiculaire d'un segment. Le segment $\overline{CD}$ est une médiatrice du segment $\overline{AB}$ parce qu'il bissecte le segment $\overline{AB}$ ($\overline{AC} \cong \overline{CB}$) et qu'il forme un angle droit avec le segment $\overline{AB}$, $\angle BCD = 90°$.

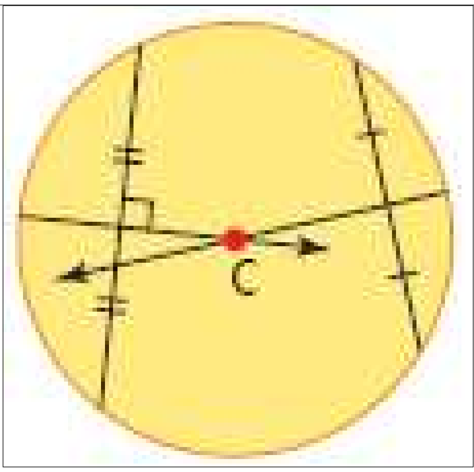


Les Médiatrices – Proprietés

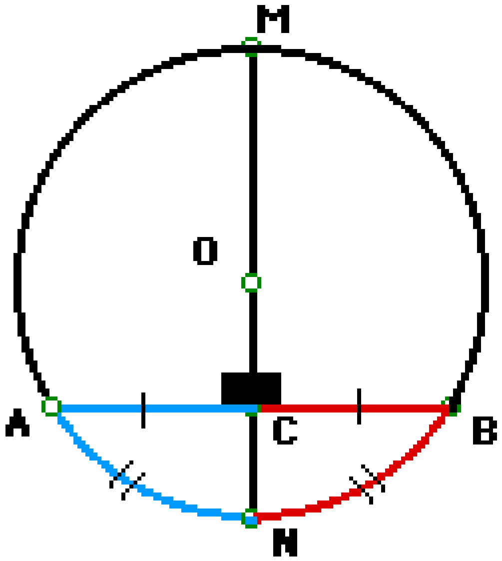
La *médiatrice* d'une corde passe par le centre (O) du cercle.



Les *médiatrices* de deux cordes se coupent au centre du cercle.



Si une droite divise une corde en deux parties égales et passe par le centre du cercle, alors cette droite est **perpendiculaire** à la corde.



Si une droite passe par le centre d'un cercle et coupe une corde à angle droit (90º), alors cette droite coupe la corde en deux parties congruents.

La plus courte distance entre le centre d'un cercle et une corde est la droite perpendiculaire à la corde.
$\overline{OC}$ *est la droite la plus courte qui va du corde au centre. C'est la distance perpendiculaire.*